# 第四单元 三角函数、解三角形

## 基础课19 任意角、弧度制和三角函数的概念

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **考点考向** | **课标要求** | **真题印证** | **考频热度** | **核心素养** |
| 任意角的三角函数 | 理解 | 2023年全国乙卷（文）  2023年北京卷 | ★★☆ | 数学运算  直观想象 |
| 命题分析预测 | 从近几年高考的情况来看，高考一般不单独考查任意角、弧度制和三角函数的概念，三角函数的定义一般在立体几何、解析几何中用到.预计2025年高考不会单独命题 | | | |

### 基础知识·诊断

#### 夯实基础

##### 一、角的概念的推广

1.定义：角可以看成是平面内的一条射线绕着它的①端点从一个位置旋转到另一个位置所形成的图形.

2.分类：按旋转方向不同分为②正角、③负角、④零角.按终边位置不同分为象限角和轴线角.

3.所有与角 终边相同的角，连同角 在内，可构成一个集合⑤ ,}.

##### 二、弧度制及相关公式

1.定义：把长度等于⑥半径长的弧所对的圆心角叫作1弧度的角，弧度记作.

2.公式

|  |  |
| --- | --- |
| 角的弧度数公式 | （弧长用表示） |
| 角度与弧度的换算 | ； |
| 弧长公式 | 弧长 |
| 扇形面积公式 |  |

【提醒】角度与弧度换算的关键是 ,在同一个式子中，采用的度量制度必须一致，不可混用.用弧度制表示角时，“弧度”二字或“”通常略去不写，而只写该角所对应的弧度数.

##### 三、任意角的三角函数

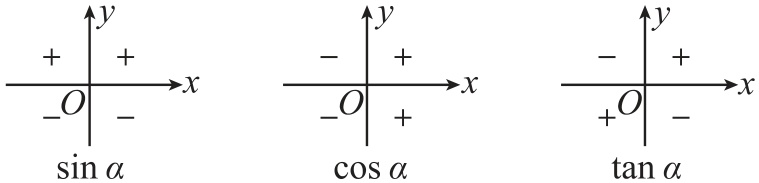
1.定义

设 是一个任意角，它的终边与单位圆交于点,那么,⑪,⑫.

2.定义的推广

设是角 终边上异于原点的任一点，它到原点的距离为，那么，，.

3.三角函数值在各象限内的符号：一全正、二正弦、三正切、四余弦，如图所示.



###### 知识 拓展

1.终边相同的角与对称性拓展

（1） 与 终边相同.

（2） 与 终边关于轴对称.

（3） 与 终边关于轴对称.

（4） 与 终边关于原点对称.

2.终边相同的角不一定相等，相等角的终边一定相同.在书写与 终边相同的角时，单位必须一致.

#### 诊断自测

##### 题组1 走出误区

1. 判一判.（对的打“√”,错的打“×”）

（1） 若，则 的终边落在第一或第二象限.( × )

（2） 锐角是第一象限角，反之亦然.( × )

（3） 将表的分针拨快5分钟，则分针转过的角度是 .( × )

（4） 相等的角终边一定相同，终边相同的角也一定相等.( × )

2. （易错题）已知角 的终边上有一点，且，则或.

**【易错点】**忽视对的分类讨论或讨论不全面.

[解析]由题意可知，解得或或.当时，；当时，；当时，.综上所述， 的值为或.

##### 题组2 走进教材

3. （人教A版必修改编）已知角 是第二象限角，则角 是第( D )象限角.

A. 一 B. 二 C. 三 D. 一或三

[解析]因为角 是第二象限角， ，，即 ，，令，得；令，得.故 是第一或第三象限角.故选.

4. （人教A版必修改编）已知角 的终边经过点，则.

[解析]由三角函数的定义可得.

##### 题组3 走向高考

5. [2023·北京卷]（双空题）已知命题若角 , 为第一象限角，且 ，则 .能说明为假命题的一组 , 的值为（答案不唯一），（答案不唯一）.

[解析]取 ,，则 ，但 ，不满足 ，所以使命题为假命题的一组 , 的值可以是,.

### 考点聚焦·突破

#### 考点一 象限角及终边相同的角［自主练透］

1. 在下列表达式中，与角的终边相同的角是( C ).

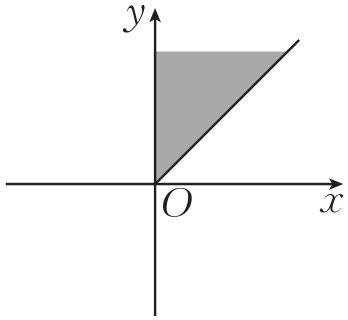
A. ， B. ，

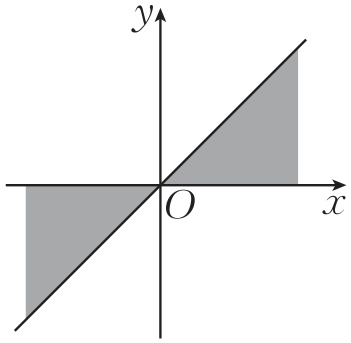
C. ， D. ，

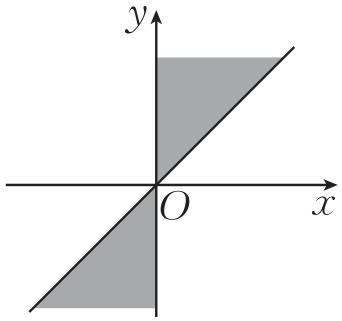
[解析]首先角度制与弧度制不能混用，所以,错误；

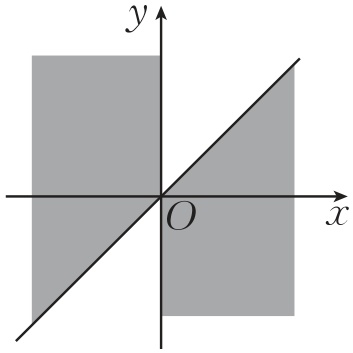
因为与的终边相同的角可以写成，所以正确.故选.

2. 集合,中的角所表示的范围（阴影部分）是( C ).

A. 

B. 

C. 

D. 

[解析]当时，,，此时 表示的范围与表示的范围一样；

当时，,，此时 表示的范围与 表示的范围一样.故选.

3. （多选题）下列说法正确的是( AC ).

A. 终边落在轴的非负半轴的角的集合为 ,}

B. 终边落在轴上的角的集合为 ,}

C. 在 范围内所有与 角的终边相同的角为 和

D. 第三象限角的集合为 ,

[解析]终边落在轴的非负半轴的角的集合为 ,，故正确；

由于角度制和弧度制不能混用，故错误；

所有与 角的终边相同的角可以表示为 ,，则在 范围内，取,得 ，取得，得 ，故正确；

第三象限角的集合为 ,，故错误.故选.

4. 已知角 的终边在第二象限，且，则角的终边在( C ).

A. 第一象限或第三象限 B. 第二象限或第四象限

C. 第三象限 D. 第四象限

[解析] 角 是第二象限角，，，

，， 角的终边在第一或第三象限.

，， 角的终边在第三象限.故选.

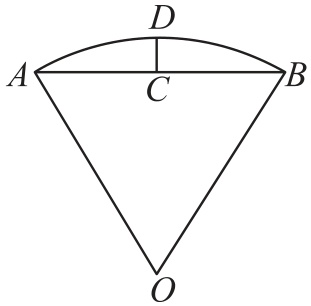


1.利用终边相同的角的集合可以求适合某些条件的角，方法是先写出与这个角的终边相同的所有角的集合，然后通过对集合中的参数赋值来求得所需的角.

2.确定 ，的终边位置的方法：先写出 或的范围，然后根据的可能取值确定 或的终边所在位置.

#### 考点二 弧度制及其应用［师生共研］

典例1 [2022·全国甲卷]沈括的《梦溪笔谈》是中国古代科技史上的杰作，其中收录了计算圆弧长度的“会圆术”，如图，是以为圆心，为半径的圆弧，是的中点，在上，.“会圆术”给出的弧长的近似值的计算公式：.当, 时，( B ).



A. B. C. D.

[解析]， ，，

是的中点，在上，，

延长可得在上（图略），，

.故选.

变式设问1 若本例条件不变，则弓形的面积为.

[解析]由已知得，，，所以弓形的面积为.

变式设问2 若本例条件不变，记实际弧长为，则的值约为0.05.（结果保留两位小数，参考数据：，）

[解析]由弧长公式可得,则.



**应用弧度制解决问题时应注意的三点**

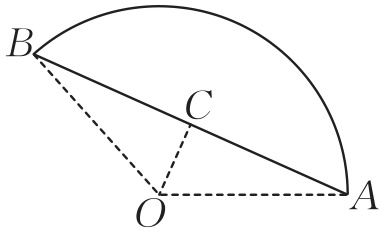
1.利用扇形的弧长和面积公式解题，要注意角的单位必须是弧度；

2.求扇形面积最大值的问题，常转化为二次函数的最值问题；

3.在解决弧长问题和扇形面积问题时，要合理地利用圆心角所在的三角形.

##### 针对训练

（双空题）《九章算术》是中国古代的数学名著，其中《方田》一章给出了弧田面积的计算公式.如图所示，弧田是由圆弧及其所对弦围成的图形.若弧田的弦长为2，弧所在圆心角的弧度数也是2，为的中点,为弧所在圆的圆心，则弧田的弧的长为，弧田的面积为.



[解析]由题意可知,,,，

所以弧，弧田的面积.

#### 考点三 三角函数的定义及其应用［多维探究］

##### 三角函数的定义角度1

典例2（1） [2024·银川模拟]已知点在角的终边上，且，则角 的大小为( B ).

A. B. C. D.

[解析]依题意，点在第二象限，又，所以 ，而，所以.故选.

（2） 已知角 的顶点与原点重合，始边与轴正半轴重合，终边在直线上，则角 的余弦值为( D ).

A. B. C. D.

[解析]因为角 的终边在直线上，所以角 的终边在第一象限或第三象限，

可设点为角 的终边上一点，

所以.故选.

（3） 已知角 的终边过点，且，则.

[解析]因为角 的终边过点，

所以，,

又，所以点在第四象限，

由，解得（舍去）或,

所以.



**与三角函数的定义有关的三种题型及解题方法**

|  |  |
| --- | --- |
| 题型 | 解题方法 |
| 已知角的终边上一点的坐标，求角的三角函数值 | 先求出点到原点的距离，再利用三角函数的定义求解 |
| 已知角的一个三角函数值和终边上一点的横（纵）坐标，求与角有关的三角函数值 | 先求出点到原点的距离（带参数），根据已知的三角函数值及三角函数的定义建立方程，求出未知数，从而求解问题 |
| 已知角终边所在的直线方程，求角的三角函数值 | 先设出终边上一点,，求出点到原点的距离，再利用三角函数的定义求解 |

##### 三角函数值符号的判断角度2

典例3（1） 已知，则“”是“角 为第一或第四象限角”的( B ).

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

[解析]充分性：当时，

不妨取,则,此时角 为轴线角，不成立,故不满足充分性.

必要性：若角 为第一或第四象限角，则，显然成立.故选.

（2） 已知点在第二象限，则角 的终边在( C ).

A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

[解析]点在第二象限，则所以角 的终边在第三象限.故选.



**判断三角函数值的符号的三点注意**

1.确定角的终边所在的象限；

2.结合三角函数值在各象限的符号来确定所求三角函数值的符号；

3.不要忽略角的终边在坐标轴上的情况.

##### 多维训练

1. 设 是第三象限角，为其终边上的一点，且，则( A ).

A. B. C. D.

[解析]由题可知，解得，因为 是第三象限角，所以，则.故选.

2. 的值( A ).

A. 小于0 B. 大于0 C. 等于0 D. 不小于0

[解析]因为，

所以,,，所以.故选.